

TD₁₅ – Intégrales à paramètre

Exercice à préparer

Exercice 1 ★★★★★

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D_F de F . Étudier la parité de F .
2. Montrer que F est continue sur son ensemble de définition
3. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur D_F et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
4. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F et en déduire une expression simple de $F(x)$

On pourra utiliser le fait que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.